Metodi di Supporto alle Decisioni Manageriali

MSDM

Lezione :
Metodi Decisionali Multi Criteri

Parte III - 03

Il metodo AHP
(Analytic Hierarchy Process)

- **Analytic** - Scompone il problema nei suoi elementi costitutivi
- **Hierarchy** – Struttura gli elementi costitutivi in modo gerarchico rispetto all’obiettivo principale ed ai sub-obiettivi
- **Process** - Processa i giudizi ed i dati in modo da raggiungere il risultato finale

(Prof.Thomas Lorie Saaty : 1980; 1982)

è una teoria che si applica a sistemi in cui sono presenti misure relative di criteri intangibili.

Scompone il macro-problema in micro-problemi di più facile soluzione

Metodologia decisionale ideata da Saaty, che ha combinato e sviluppato strumenti già esistenti:

CONFRONTI A COPPIE
METODO DEGLI AUTOVETTORI
GIUDIZI VERBALI-QUALITATIVI ESPRESSI CON NUMERI
CONSISTENZA

Il metodo, in generale, consente di valutare le priorità di azioni che possono essere, a seconda dei casi: programmi, strategie d'intervento, piani, progetti, ecc.

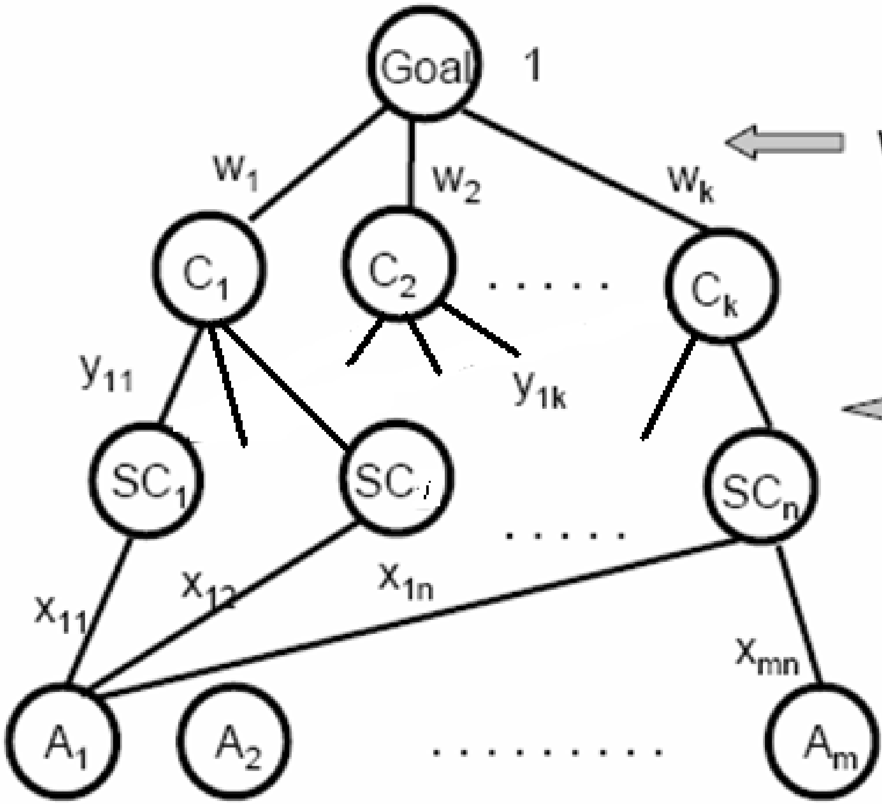
Rappresentazione formale AHP

- Dati k livelli (k livello delle alternative):
- Dati L livelli gerarchici $L = K-1$
  - Elementi al livello k (alternative): $x_1^k,\dots,x_n^k$
  - Elementi al livello k-1 (criteri o subcriteri): $y_1^{k-1},\dots,y_m^{k-1}$
  - Elementi al livello k- f (criteri, subcriteri) : $y_1^{k-f},\dots,y_g^{k-f}$
  - Elementi al livello k-L (goal): z_1^{k-L}
  - $W_{k-1} = [w_{y_j}(x_i)^k]$ matrice dei pesi relativi delle alternative rispetto ai criteri y_j al livello superiore
  - $W_{k-2} = [w_{y_g}^{k-2}(y_j)^{k-1}]$ matrice dei pesi relativi delle alternative rispetto criteri y_g al livello superiore
  - $W_{k-L} = [w_{zh}^{k-L}(y_g^{k-f})]$ matrice dei pesi relativi dei criteri a livello 1 rispetto al criterio z_h^{k-L} al livello superiore

- La priorità di x_i^k rispetto a z_h^{k-L}

$$W_1 = [w_{z_h}^1(x_i^k)] = W_{k-1} \times \bullet \bullet \times W_{k-(L-1)} = [w_{y_j}^{k-1}(x_i)^k] \times \bullet \bullet \times [w_{z_h}^{k-L}(y_j)^{k-1}]$$

Ad esempio su 4 livelli:



$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \end{bmatrix}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nk} \end{bmatrix}$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}$$

$K = 4$

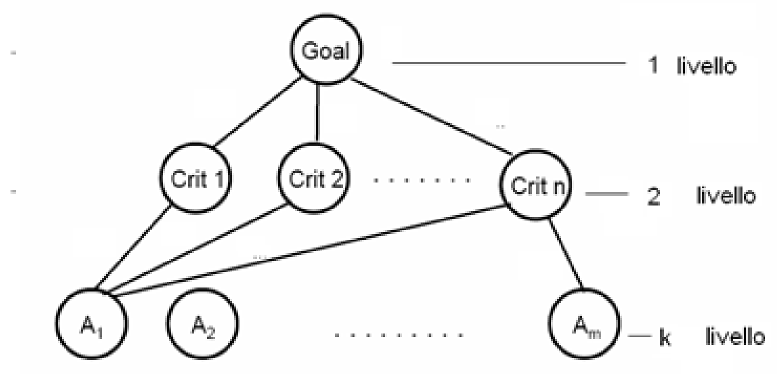
Le fasi del metodo AHP

1) Scomposizione del problema

FASE 1 : Contestuale

- goal
- obiettivi
- sub-obiettivi
- …
- alternative

La decisione é strutturata secondo una gerarchia di **dominanza**



Fase 2 : OPERATIVA

2) Giudizi comparativi (confronti a coppie)

FASE 3 : Elaborativa

3) Composizione gerarchica o sintesi delle priorità

L’analisi gerarchica
scomposizione del problema

Fase (1) – Il primo passo del metodo comporta la costruzione della <u>gerarchia di dominanza</u>.

Attività : scomposizione di un problema decisionale in un insieme di sottoproblemi più semplici con definizione di una gerarchia (struttura ad albero)

Una gerarchia di dominanza è una struttura reticolare costituita da due o più livelli.

Il primo livello (radice dell’albero) contiene l'obiettivo generale della valutazione o *goal*.

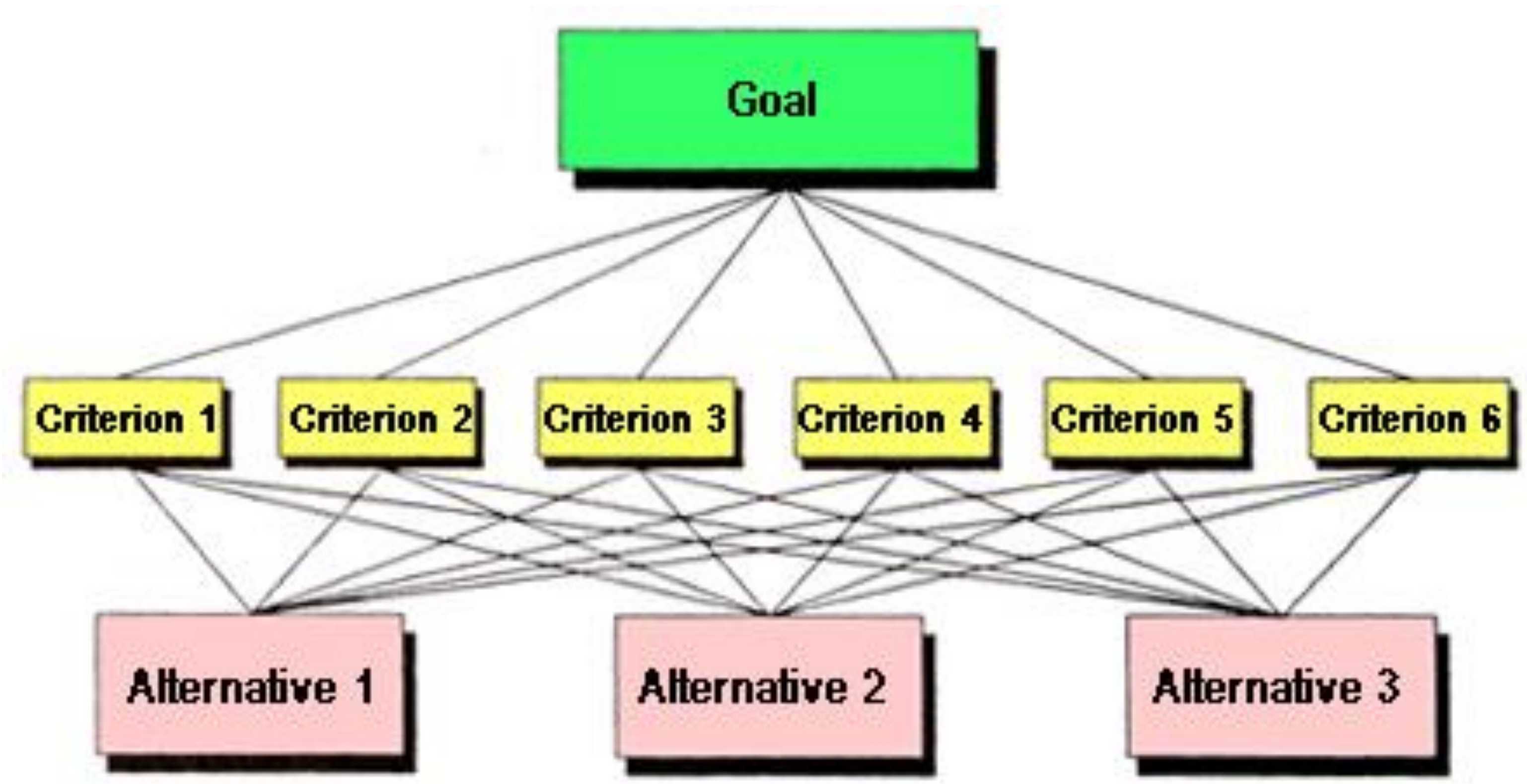
Il secondo livello contiene gli obiettivi che specificano contenuti e significati del goal (le dimensioni).
Ciascuno di questi può essere suddiviso a sua volta in obiettivi più specifici

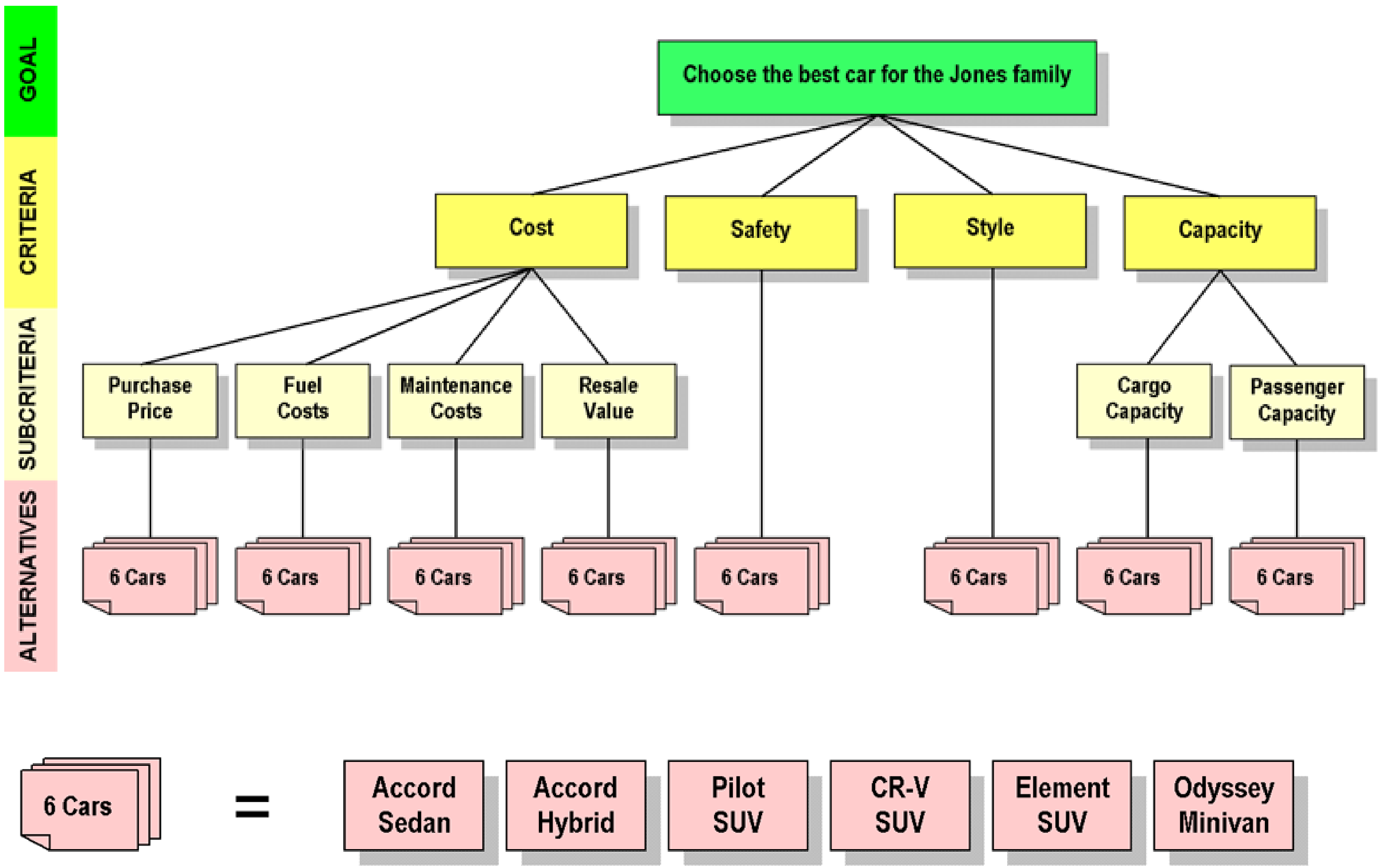
terzo livello gli attributi o sotto-obiettivi.

Ultimo livello le alternative

La scelta del numero di livelli e del numero di elementi deve tenere conto sia delle caratteristiche del contesto fisico e decisionale, sia della natura delle azioni da valutare.

- In altri termini, la decisione viene scomposta in vari livelli, dove il primo rappresenta l'obiettivo del problema (ossia ad es. la selezione di un dato progetto di investimento), il secondo livello (e gli eventuali successivi) gli attributi e i sottoattributi ritenuti determinanti per il raggiungimento dell'obiettivo.
- Ciascun attributo o sottoattributo può essere scomposto fino a raggiungere il livello di dettaglio desiderato. L'ultimo livello fa riferimento alle alternative in esame


Goal
Criterion 1
Criterion 2
Criterion 3
Criterion 4
Criterion 5
Criterion 6
Alternative 1
Alternative 2
Alternative 3


GOAL
CRITERIA
SUBCRITERIA
ALTERNATIVES
Choose the best car for the Jones family
Cost
Safety
Style
Capacity
Purchase Price
Fuel Costs
Maintenance Costs
Resale Value
Cargo Capacity
Passenger Capacity
6 Cars
6 Cars
6 Cars
6 Cars
6 Cars
6 Cars
6 Cars
6 Cars
6 Cars
=
Accord Sedan
Accord Hybrid
Pilot SUV
CR-V SUV
Element SUV
Odyssey Minivan

Fase (2)

- L’approccio generale di valutazione consiste nello svolgere confronti incrociati a coppie tra gli elementi di un dato livello relativamente a quelli del livello superiore.
- L’obiettivo è quello di abbinare ad ogni confronto un valore che rappresenti il grado di importanza di una alternativa rispetto all’altra (utilizzando la scala di saaty).
- Le preferenze del decisore (ossia i dati di ingresso del modello analitico) vengono ottenute attraverso comparazioni nelle quali vengono espressi giudizi su elementi posti allo stesso livello rispetto all’elemento immediatamente superiore.
- Il risultato di questa attività è la generazione di una serie di valori che permettono di elencare le alternative esaminate in ordine di preferenza del decisore

- i risultati dei confronti a coppie vengono aggregati in forma matriciale ; se le preferenze del decisore sono espresse in termini qualitativi è necessario trasformarle in valori numerici per ottenere preferenze espresse in termini quantitativi

  Utilizzo della scala di importanza di Saaty (9 classi qualitative di preferenza a cui viene associato un valore numerico)

  Questo consente di calcolare un peso riferito ai vari attributi/criteri in gioco attraverso una serie sistematica di valutazioni comparative tra coppie degli stessi.

INTENSITA' DI IMPORTANZA a_{ij}	DEFINIZIONE	SPIEGAZIONE
1	UGUALE IMPORTANZA	LE DUE ATTIVITA' CONTRIBUISCONO ALLA STESSA MISURA
3	PREVALENZA DEBOLE	L'ESPERIENZA ED IL GIUDIZIO FAVORISCONO LEGGERMENTE L'ATTIVITA' i
5	PREVALENZA FORTE	L'ESPERIENZA ED IL GIUDIZIO FAVORISCONO CHIARAMENTE L'ATTIVITA' i
7	PREVALENZA DIMOSTRATA	LA PREVALENZA DELL'ATTIVITA' i E' DIMOSTRATA IN PRATICA
9	PREVALENZA ASSOLUTA	LA PREVALENZA DELL'ATTIVITA' i E' DIMOSTRATA CON IL MASSIMO POSSIBILE LIVELLO DI CERTEZZA
2, 4, 6, 8	VALORI INTERMEDI	DA UTILIZZARE SE COMPATIBILI CON LA CAPACITA' DI DISCRIMINAZIONE

Fase (3)

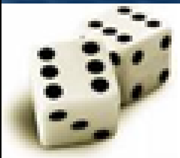
Costruite le matrici di confronto a coppie si passa poi alla **determinazione dei pesi locali.** I *pesi* sono coefficienti che misurano l'importanza relativa di singoli elementi. Esempio originale da Saaty : supponiamo di voler determinare in modo diretto i pesi (fisici) w1, w2, ..., wn di n pietre con una bilancia e di calcolare il coefficiente di dominanza di ogni coppia di pietre come rapporto dei rispettivi pesi, cioè aij=wi/wj avremo la matrice seguente.

Chapter 9 *MULTIPLE CRITERIA DECISION ANALYSIS*

THE ANALYTIC HIERARCHY AND ANALYTIC NETWORK PROCESSES FOR THE MEASUREMENT OF INTANGIBLE CRITERIA AND FOR DECISION-MAKING

Thomas L. Saaty
Katz Graduate School of Business
University of Pittsburgh
USA
saaty@katz.pitt.edu

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A_1 & \cdots & A_n \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{array} & \begin{bmatrix} w_1/w_1 & \cdots & w_1/w_n \\ \vdots & & \vdots \\ w_n/w_1 & \cdots & w_n/w_n \end{bmatrix} \end{array}.$$



La matrice dei confronti a coppie

- i coefficienti di dominanza definiscono una matrice quadrata, reciproca e positiva detta *matrice dei confronti a coppie.*

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{ii} = 1 \\ a_{ji} = 1/a_{ij} \end{array}\right\} \text{Condizione 1}$$

$$a_{jk} = a_{ik}/a_{ij} \quad \text{Condizione 2}$$

- Essendo: $a_{ii}=1$ e $a_{ji}=1/a_{ij}$, $a > 0$ per ogni valore di i e j .

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- La seconda condizione, nota come relazione di reciprocità scaturisce dalla necessità di garantire la simmetria dei giudizi di importanza (garantisce la transitività).
- Quando è valida la seconda condizione , la matrice $A=(a_{ij})$ è detta <u>consistente</u> altrimenti

  essa è semplicemente reciproca.

- Si ricorda che

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A_1 & \cdots & A_n \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{array} & \begin{bmatrix} w_1/w_1 & \cdots & w_1/w_n \\ \vdots & & \vdots \\ w_n/w_1 & \cdots & w_n/w_n \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Autovalore e Autovettore

Definizione . Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ si dice autovalore (reale) di A se esiste $C \in \mathbb{R}^{n,1} \setminus \{ 0_{n,1} \}$ tale che $AC = \lambda C$

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di A, l'insieme

$$E_A(\lambda) = \{ C \in \mathbb{R}^{n,1} \mid AC = \lambda C \} \subseteq \mathbb{R}^{n,1}$$

viene detto autospazio di A (relativo a λ): ogni $C \in E_A(\lambda)$ si dice autovettore di A (relativo a λ).

qualche osservazione di carattere generale. Innanzi tutto osserviamo che $\lambda \in \mathbb{R}$ è autovalore di A se e solo se esiste $C \in \mathbb{R}^{n,1}$ non nullo soluzione dell'equazione

$$AX = \lambda X.$$

Tale equazione è, chiaramente, equivalente all'equazione $AX - \lambda X = 0_{n,1}$ o anche, raccogliendo X, all'equazione $(A - \lambda I_n)X = 0_{n,1}$

Quest'ultima può essere pensata come equazione matriciale omogenea nell'incognita X e nel parametro λ: λ è autovalore di A se e solo se tale equazione ha soluzioni non banali ovvero, $\det(A - \lambda I_n) = 0$

2.2. Teorema. *Sia A una matrice $n \times n$. Uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di A se e solo se* $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Risolvendo, si ottiene un'equazione di grado n in λ, detta *equazione caratteristica*

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0 .$$

Per il Teorema fondamentale dell'algebra, questa equazione ha n soluzioni, in generale complesse, ognuna contata con la propria molteplicità.
Le n soluzioni, gli autovalori di $\mathbf{A}$, si indicano con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Al fine di calcolare i valori del vettore $w = (w_1, \ldots, w_n)$
Si introduce il sistema di equazioni:

$$Aw = \begin{bmatrix} w_1/w_1 & \cdots & w_1/w_n \\ \vdots & & \vdots \\ w_n/w_1 & \cdots & w_n/w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = nw, \qquad [1]$$

Si verifica facilmente che:

$$A\,w = n\,w$$

:

E nella teoria delle matrici la [1] esprime il fatto che **w** è un *autovettore* di **A** con *autovalore* **n**.

n è un autovalore se e solo se il ***sistema lineare*** Av= nv ha soluzioni non tutte nulle.

Tale sistema può essere scritto nella forma A v - In v = 0, dove I è la matrice identica, ovvero (A - In) v = 0. Si ottiene così un ***sistema omogeneo*** avente un numero di equazioni pari al numero delle incognite.

Ricordando che un tale sistema ha soluzioni non nulle se e solo se il determinante della matrice A- In è nullo e osservando che det(A - nI) è un polinomio di grado n in l , detto ***polinomio caratteristico*** , si ha il seguente

Teorema : g***li autovalori di una matrice sono tutti e soli le radici del polinomio caratteristico det(A-*** n***I).***

Teorema1. Una matrice quadrata di rango uno possiede un solo autovalore diverso da zero (tutti gli altri sono nulli).

Teorema 2. L'autovalore di una matrice quadrata é uguale alla sua traccia.

Teorema 3. Una matrice AHP (di Saaty) é positiva (i suoi coefficienti sono tutti positivi) e irriducibile, cioè non può essere ricondotta alla forma:

$$\begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

dove $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_3}$ sono matrici quadrate e **0** é la matrice nulla.

Teorema 4 (Teorema di Perron-Frobenius). Una matrice *irriducibile e non negativa*:
(i) possiede un autovalore reale positivo semplice, detto autovalore massimo (o principale), il cui modulo non é mai inferiore a quello di ogni altro autovalore della matrice;
(ii) l'autovettore corrispondente all'autovalore principale ha coefficienti positivi ed é unico, a meno di un fattore costante

.

Per determinare i pesi w possiamo pertanto fare ricorso a due importanti risultati della teoria delle matrici

- **Se y_1, y_2, ..., y_n sono n numeri che soddisfano l'equazione:**

$$Aw = y w,$$

(sono gli autovalori di A) e se per tutti i valori di y è a_{ii} =1, allora:

$$\Sigma\, a_{ii} = n \qquad (i=1,\dots, n). \;[1]$$

- **Se la [1] è valida, tutti gli autovalori sono necessariamente uguali a zero escluso uno, che vale n.**

Se ne deduce che quando A è una matrice consistente, n è il suo autovalore massimo (o autovalore principale) ed è l'unico ad essere diverso da zero.

Se si modificano leggermente i valori a_{ij} di una matrice reciproca e positiva, i corrispondenti valori degli autovalori variano di poco e in modo continuo.

Commento: nel caso di perfetta coerenza una matrice di Saaty possiede un solo autovalore non nullo il cui valore é esattamente uguale all'ordine n della matrice (deriva dai Teoremi 1. e 2.). In realtà la matrice possiede anche n-1 autovalori nulli cui corrispondono altrettanti autovettori nulli. Ciò giustifica il fatto che l'autovettore principale della matrice, normalizzato in modo che la somma delle sue componenti sia uguale a 1, venga assunto nel metodo AHP come vettore dei pesi cercati anche quando la matrice si allontana dalla condizione di perfetta coerenza e possiede altri autovalori che sono (leggermente) diversi da zero.

Numero di confronti

- **Confrontando a coppie n elementi si ottengono n^2 coefficienti essendo nxn:**
- **di questi soltanto n(n-1)/2 devono essere direttamente determinati dal decisore o dall'esperto che effettua la valutazione, essendo $a_{ii}=1$ e $a_{ji}=1/a_{ij}$ per ogni valore di i e j.**

La matrice dei confronti a coppie

$$
\begin{array}{c|ccc}
\text{Attributo}_i & A_1 & A_2 & A_3 \\
\hline
A_1 & 1 & 1/3 & 1/9 \\
A_2 & 3 & 1 & 3 \\
A_3 & 9 & 1/3 & 1
\end{array}
$$

- l'elemento m_{ij} della matrice rappresenta la preferenza relativa per l'alternativa A_i rispetto all'alternativa A_j con riferimento a un determinato attributo (in questo caso Attributo_i)

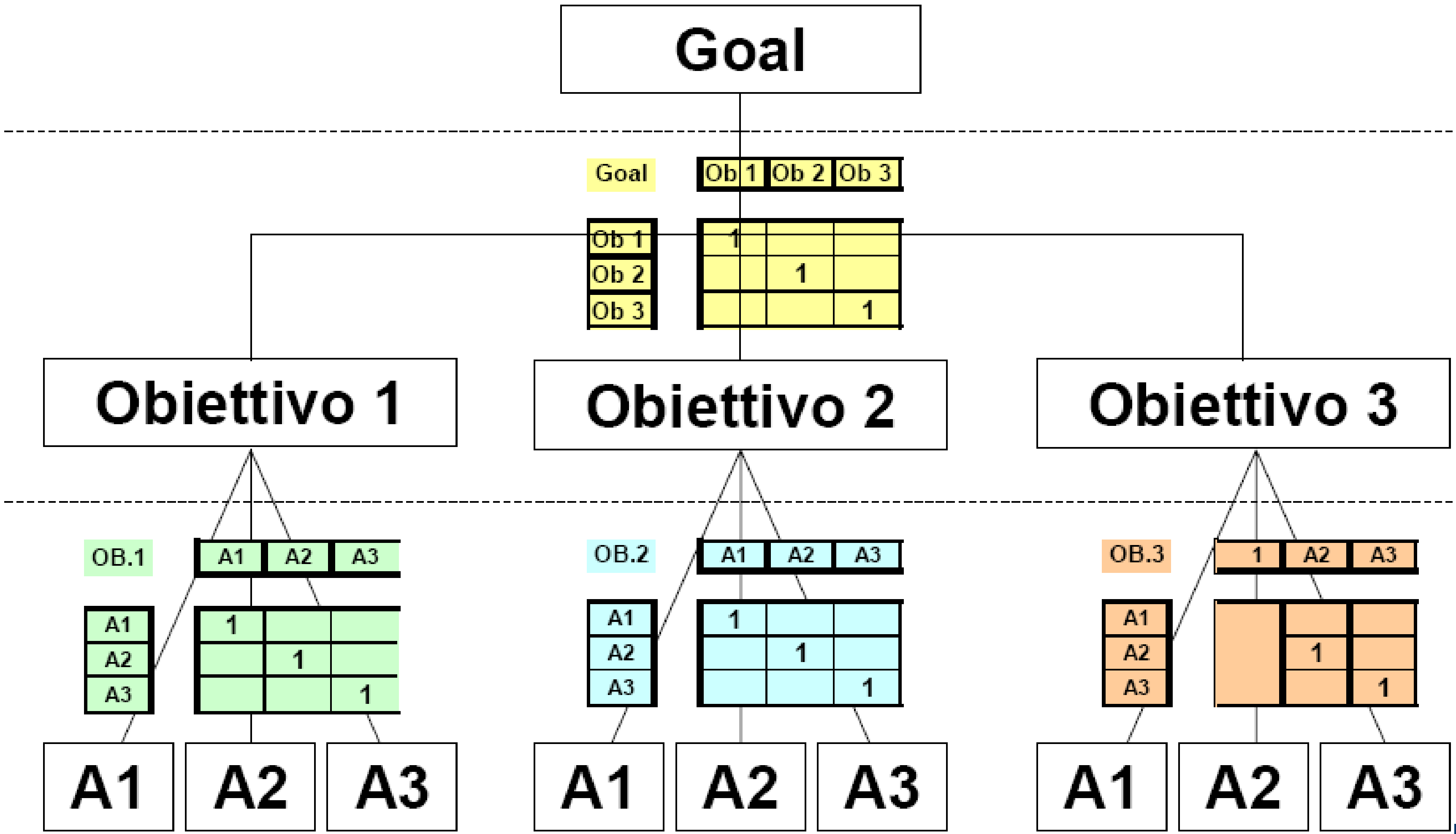
proprietà

- definita positiva $m_{ij} > 0$
- reciprocità $m_{ij} = 1 \ / \ m_{ji}$ → sempre soddisfatta
- consistenza $m_{ik} = m_{ij} \cdot m_{jk}$ → non garantita

metodo AHP: assiomi

- 1) Reciprocità(se A = 2B -> B = 1/2 A)
- 2) Omogeneità (gli elementi da comparare non devono essere troppo dissimili)
- 3) Indipendenza dei giudizi (per ogni livello della gerarchia i giudizi espressi sugli obiettivi non devono dipendere dai giudizi espressi sugli obiettivi o alternative poste ai livelli inferiori)

confronti a coppie

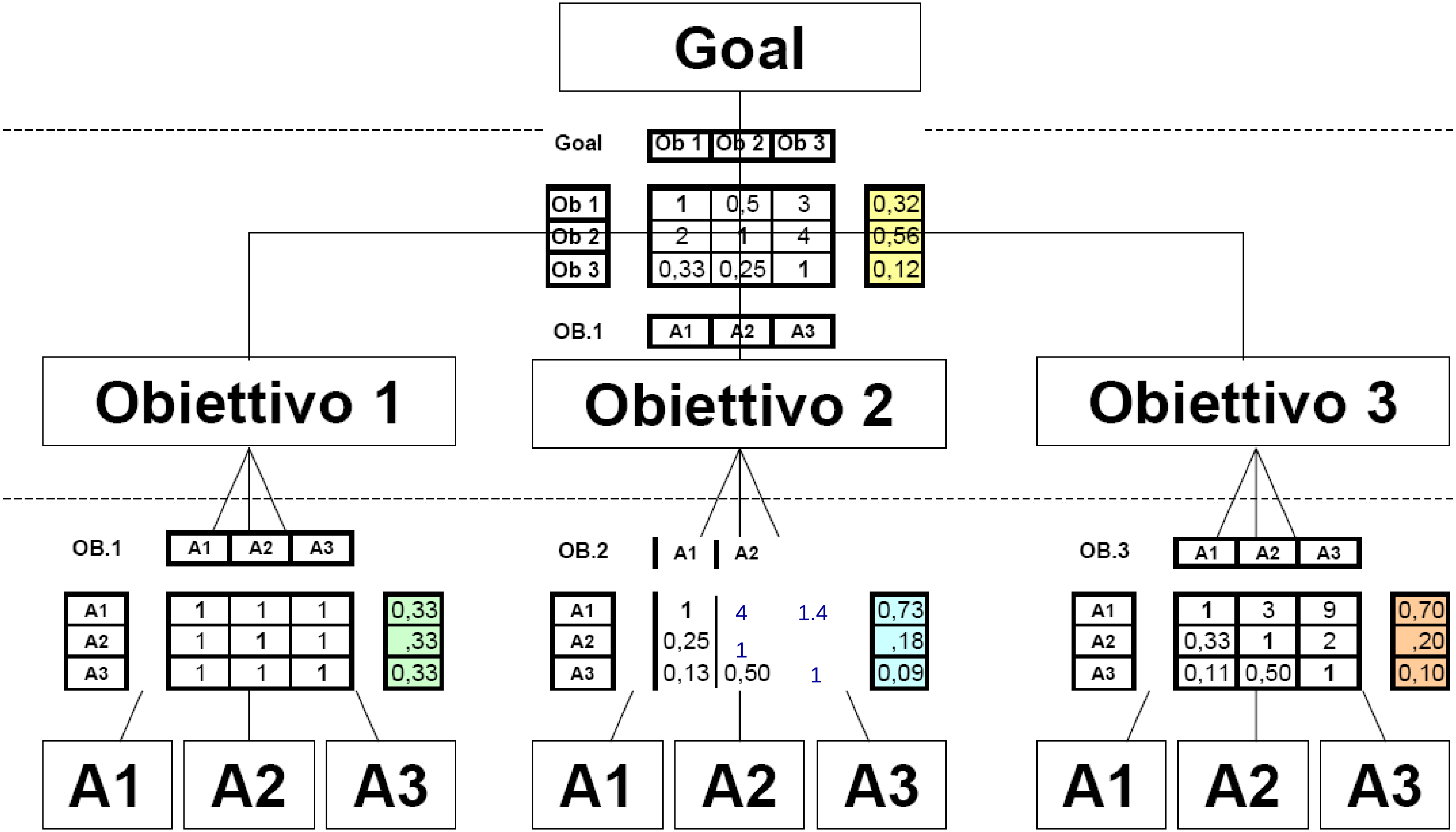


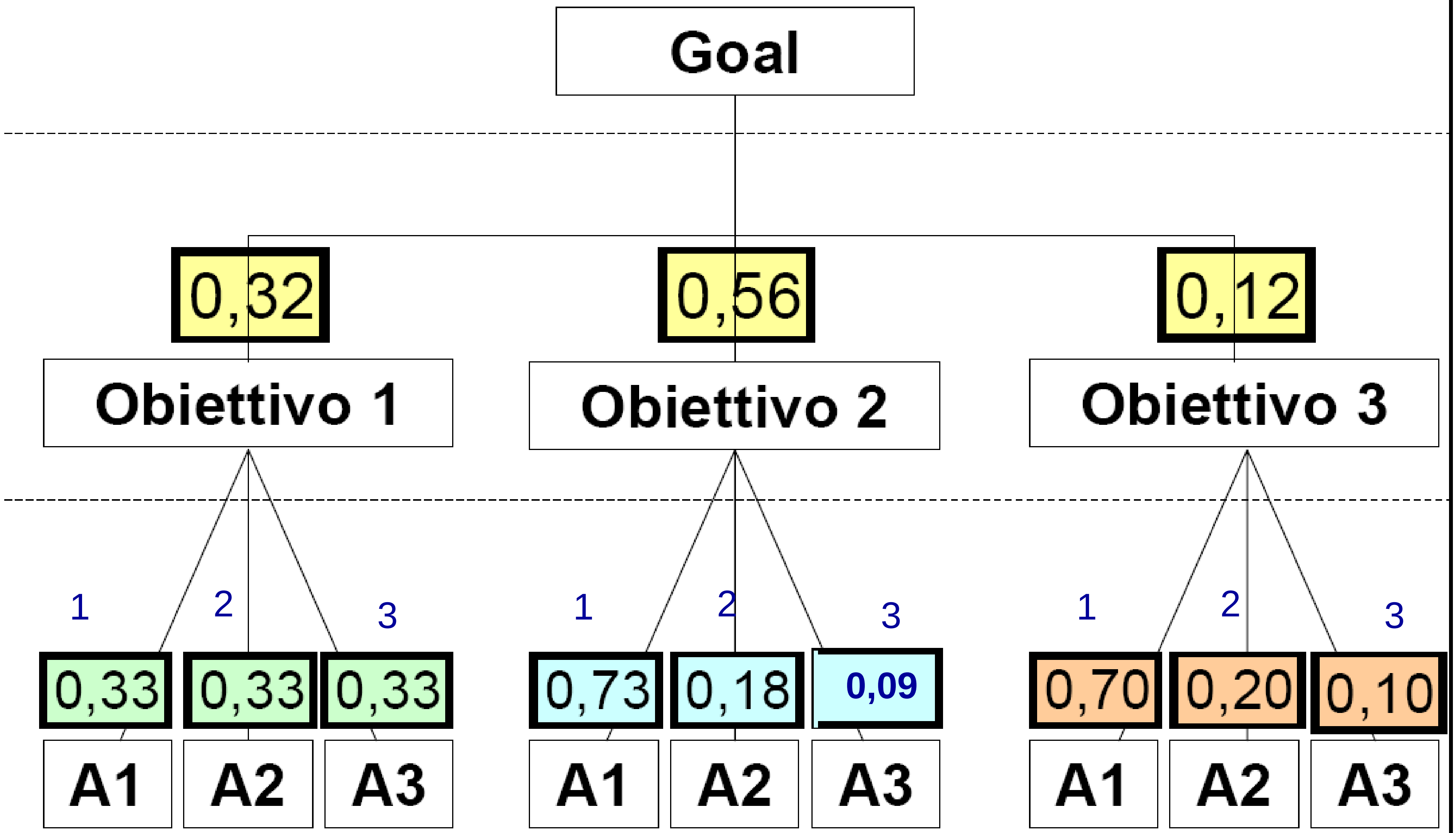
	Ob. 1	Ob. 2	Ob. 3
Ob. 1	1	4	8
Ob. 2	1/4	1	2
Ob. 3	1/8	1/2	1

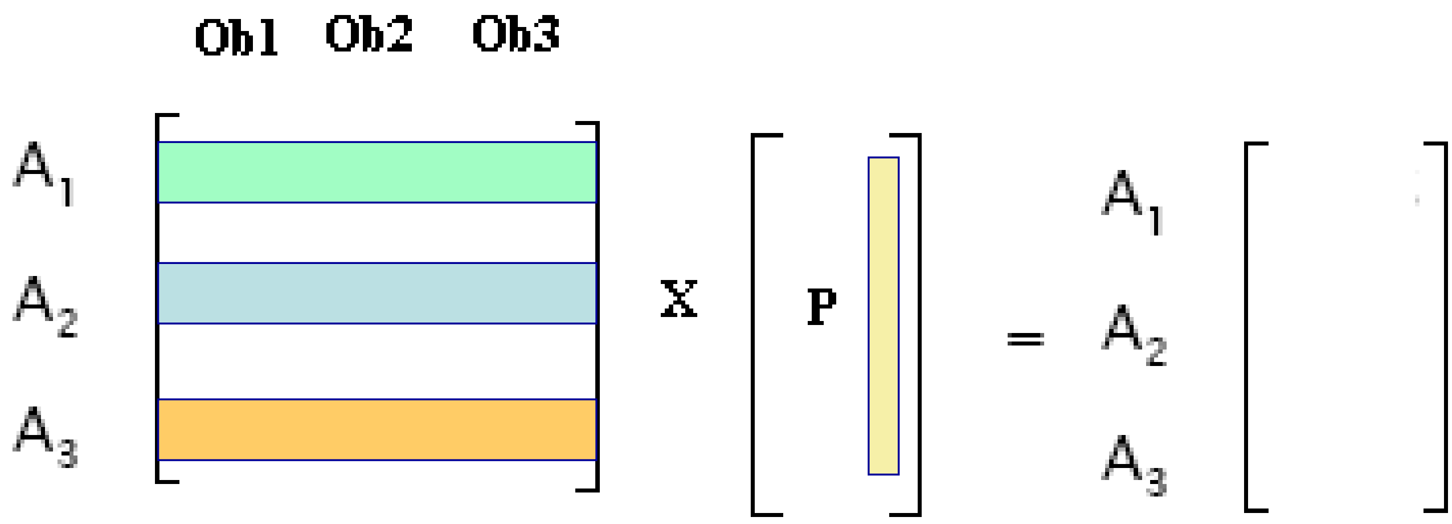
- Proprietà delle matrici:
  - Positive
  - Reciproche
  - Gli uno lungo la diagonale

Valori accettati nei confronti a coppie

	Saaty
Uguale	1
	2
Debole	3
	4
Significativa	5
	6
Forte	7
	8
Assoluta	9


Goal
Goal
Ob 1 Ob 2 Ob 3
Ob 1 1 0,5 3 0,32
Ob 2 2 1 4 0,56
Ob 3 0,33 0,25 1 0,12
OB.1
A1 A2 A3
Obiettivo 1
Obiettivo 2
Obiettivo 3
OB.1
A1 A2 A3
A1 1 1 1 0,33
A2 1 1 1 ,33
A3 1 1 1 0,33
OB.2
A1 A2
A1 1 4 1.4 0,73
A2 0,25 1 ,18
A3 0,13 0,50 1 0,09
OB.3
A1 A2 A3
A1 1 3 9 0,70
A2 0,33 1 2 ,20
A3 0,11 0,50 1 0,10
A1
A2
A3
A1
A2
A3
A1
A2
A3


Goal
0,32
0,56
0,12
Obiettivo 1
Obiettivo 2
Obiettivo 3
1
2
3
1
2
3
1
2
3
0,33
0,33
0,33
0,73
0,18
0,09
0,70
0,20
0,10
A1
A2
A3
A1
A2
A3
A1
A2
A3


Ob1 Ob2 Ob3
A1
A2
A3
X
P
=
A1
A2
A3

Obiettivo 1 Obiettivo 2 Obiettivo 3

A1 = (0,33*0,32) + (0.73*0,56) + (0,70*0,12) = 0,5984

1 1 1

A2 = (0,33*0,32) + (0.18*0,56) + (0,20*0,12) = 0,2304

2 2 2

A3 = (0,33*0,32) + (0.09*0,56) + (0,10*0,12) = 0,1680

3 3 3

Ordinamento finale

A1	0,5984
A2	0,2304
A3	0,1680

Metodo AHP
Verifica di Consistenza

Esempio originale da Saaty

però per valutare il "peso" (l'importanza) di un insieme di obiettivi o di azioni è necessario affidarsi ai giudizi di un esperto. (non esiste una bilancia !)

Non disponendo di uno strumento di misura ma soltanto della personale esperienza, *l'esperto non è in grado di determinare direttamente e con esattezza i pesi* ***w*, ma può fornire solo delle stime approssimate dei loro rapporti con l'ausilio della scala semantica .***

La matrice **A** fornita dall'esperto, nella maggioranza dei casi, non sarà consistente.

Motivazioni :
difficoltà che incontra l'esperto nel mantenere la coerenza di giudizio in tutti i confronti a coppie,

i suoi giudizi *possono essere strutturalmente non consistenti*.

- se c'è non consistenza le colonne non sono più proporzionali tra loro

La teoria dei sistemi relazionali di preferenza dimostra infatti che le relazioni di preferenza e di indifferenza che conseguono da un insieme di confronti a coppie possono essere non transitive (ad es., *a* è preferito a *b*, *b* è preferito a *c*, ma *a* può essere non preferito a *c*). Obbligando l'esperto ad essere perfettamente coerente nei suoi giudizi lo costringeremmo implicitamente (e indebitamente) a rispettare quel principio di transitività della preferenza e dell'indifferenza che non dovrebbe mai essere imposto a priori

Esempio di matrici : consistente ed inconsistente

Matrice : 1

1,0	0,3	0,7
3,0	1,0	2,0
1,5	0,5	1,0
5,5	**1,8**	**3,7**

Consistente

0,18	0,18	0,18
0,55	0,55	0,55
0,27	0,27	0,27
1,00	**1,00**	**1,00**

Matrice : 2

1,0	0,3	0,7
3,0	1,0	2,0
2,0	0,7	1,0
6,0	**2,0**	**3,7**

Non Consitente

0,17	0,16	0,18
0,50	0,49	0,55
0,33	0,34	0,27
1,00	**1,00**	**1,00**

- anche se presente l'inconsistenza, serve un metodo per determinare il vettore di ordinamento o un metodo per misurare il grado di inconsistenza.
- **Se la matrice A non è consistente, la (1) non è valida**

$$Aw = \begin{bmatrix} w_1/w_1 & \cdots & w_1/w_n \\ \vdots & & \vdots \\ w_n/w_1 & \cdots & w_n/w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = nw, \qquad [1]$$

Per risolvere il nostro problema basterà allora determinare il vettore **w che soddisfa l'equazione:**

$$\mathbf{Aw=y^*}_{max}\mathbf{w}$$

ovverosia basterà determinare l'autovettore principale corrispondente all'autovalore y^*_{max} della matrice A.

Indice di consistenza

$$CI = \frac{y^* - n}{n - 1}$$

Quando la matrice delle decisioni è costruita rispettando

$$\left.\begin{aligned} a_{ii} &= 1 \\ a_{ji} &= 1/a_{ij} \end{aligned}\right\} \text{ Condizione 1} \qquad a_{jk} = a_{ik}/a_{ij} \quad \text{Condizione 2}$$

è perfettamente consistente , CI = 0

Il più grande autovalore della matrice è pari al numero delle alternative, mentre gli altri autovalori sono nulli

- Nel caso di informazioni relative i rapporti $a_{jk} = a_{ik}/a_{ij}$ sono stimati e quindi soggettivi. Ne potrebbe conseguire che la matrice di comparazione non risulti completamente consistente
- In questi casi il massimo autovalore si discosta da n (ed i restanti possono essere non nulli)

y^*max = n , [consistenza]

y^*max ≠ n , [non consistente] (y^* è nota come $\tilde{\lambda}_{max}$)

- L'indice di consistenza è calcolato come

$$CI = \frac{y^* - n}{n-1} \qquad y^* = y^*_{max}$$

quindi CI=0 $\Rightarrow$ consistenza completa

- L'indice misura quanto il DM si discosta con i propri giudizi da una situazione di consistenza completa
- Lo scostamento dovrebbe essere causato da limitate violazioni alla transitività dei giudizi e non da giudizi espressi in maniera del tutto casuale

Il metodo prevede che l'indice CI sia confrontato con l'indice RI (*random index*).

Questo secondo indice si calcola effettuando la media dei valori di CI di numerose matrici reciproche dello stesso ordine, i cui coefficienti vengono generati in modo *random* da computer.

Quando il valore di CI della matrice compilata dall'esperto supera una soglia convenzionalmente posta uguale al 10% del valore di RI, la deviazione dalla condizione di consistenza perfetta viene giudicata inaccettabile.

$$\boldsymbol{CR} = \frac{CI}{RI} < 0.1$$

- Un metodo semplificato per la determinazione del valore di CR (consistency ratio) è quello che utilizza il valore dell’indice di consistenza random (RCI) dato dalla tabella riportata

RI	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,51

Non consistenza nei confronti a coppie

- obiettivo: cogliere al meglio il sistema di preferenze del decisore per estrarre dalla matrice dei confronti il massimo dell’informazione, **<u>l’inconsistenza non deve essere eliminata</u>** deve essere valutata e gestita.
- se c’è non consistenza le colonne non sono più proporzionali tra loro ($m_{ik} \neq m_{ij} \cdot m_{jk}$)
- serve un metodo per determinare il vettore di ordinamento
- Ipotesi :errore di consistenza piccolo metodo dell’autovettore - riflette la struttura di preferenze completa del decisore e si limita a calcolare l’errore di consistenza

Metodo delle potenze

Sia A un matrice di ordine n con n autovettori linearmente indipendenti

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n$$

ed n autovalori $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots \lambda_n$ tali che

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Il metodo delle potenze: è un metodo iterativo usato per approssimare l'autovalore di modulo massimo ed un corrispondente autovettore di una matrice A.

Applicazione AHP

Potenze di M

matrice di partenza (non consistente)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/4 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \quad M^2 = \begin{bmatrix} 3 & 5.33 & 14 \\ 1.75 & 3 & 8 \\ 0.67 & 1.16 & 3 \end{bmatrix} \quad M^3 = \begin{bmatrix} 9.16 & 16 & 42 \\ 5.25 & 9.17 & 24 \\ 2 & 3.5 & 9.17 \end{bmatrix}$$

normalizzazione

$$\begin{bmatrix} 0.57 \\ 0.29 \\ 0.14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.60 \\ 0.30 \\ 0.10 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.55 \\ 0.32 \\ 0.12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.56 \\ 0.32 \\ 0.12 \end{bmatrix} \quad \boxed{\begin{bmatrix} 0.56 \\ 0.32 \\ 0.12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.56 \\ 0.32 \\ 0.12 \end{bmatrix}}$$

Applicando il metodo delle potenze

L'indice di consistenza è calcolato come

$$CI = \frac{(y^* - n^K)}{(n^K - 1)^K}$$

$$y^* = y^*_{max}$$

K = potenza

n = alternative

K = 1

$$CI = \frac{y^* - n}{n - 1}$$

K = 2

$$CI = \frac{(y^* - n^2)}{(n^2 - 1)^2}$$

K = 1 n = 3

$$CI = \frac{y^* - 3}{3 - 1}$$

K = 2

$$CI = \frac{(y^* - 3^2)}{(9 - 1)^2}$$

- elevando a potenza la matrice dei confronti a coppie si tende a spalmare l’inconsistenza sull’intera matrice
- elevando la matrice a potenze progressivamente più elevate si ottengono matrici con colonne sempre più prossime alla proporzionalità
- il vettore a cui si converge è l’autovettore dominante della matrice di partenza, cioè quello associato all’autovalore di modulo massimo
- se l’errore di consistenza è sufficientemente piccolo,l’autovettore principale della matrice dei confronti a coppie fornisce una buona stima del vettore dei pesi

Conclusioni

- **Pregi:**
  - Risolve il problema con domande semplici
  - Consente di esprimere le preferenze sia in modo qualitativo che quantitativo
  - Non richiede una perfetta consistenza
- **Difetti:**
  - La scelta della scala numerica è arbitraria
  - L’elevato numero di confronti a coppie
  - Il rank reversal

Il problema del rank reversal

- l'ordinamento ottenuto dipende dalle alternative considerate
- è possibile che, aggiungendo una nuova alternativa e ripetendo l'analisi, si abbia un inversione dell'ordinamento anche tra le alternative già considerate (rank reversal)

↓

non c'è indipendenza dalle alternative irrilevanti

↓

l'ordinamento può essere manipolato introducendo alternative opportune!