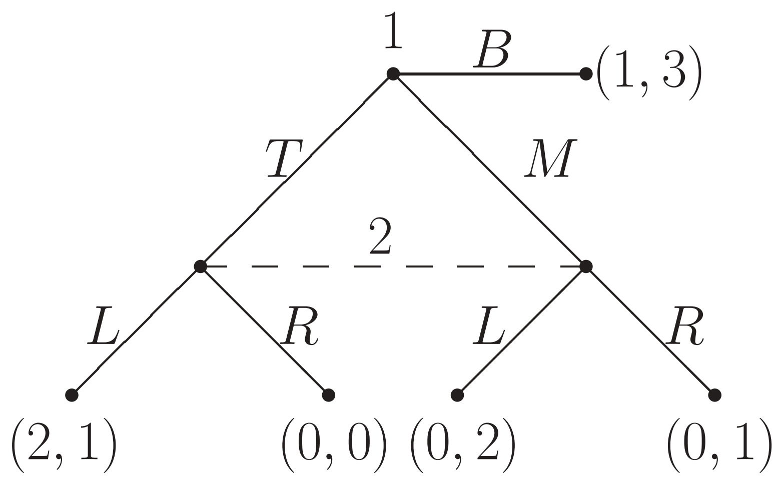
# 1 Equilibrio bayesiano perfetto

E' una semplificazione della nozione più generale di equilibrio sequenziale (Kreps-Wilson, 1982) che si adatta bene a classi particolari di giochi a informazione incompleta in forma estesa

**Esempio 1** *Consideriamo il seguente gioco in forma estesa:*




*e il gioco corrispondente in forma strategica:*

| $1 \setminus 2$ | *L* | | *R* | |
|---|---|---|---|---|
| *T* | **2** | **1** | 0 | 0 |
| *M* | 0 | **2** | 0 | 1 |
| *B* | 1 | **3** | **1** | **3** |

*$(B, R)$ è un equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi, ma $R$ è debolmente dominata da $L$* $\diamondsuit$

Vogliamo imporre dei requisiti sulle strategie di equilibrio, raffinando l'equilibrio di Nash ed escludendo situazioni come la precedente

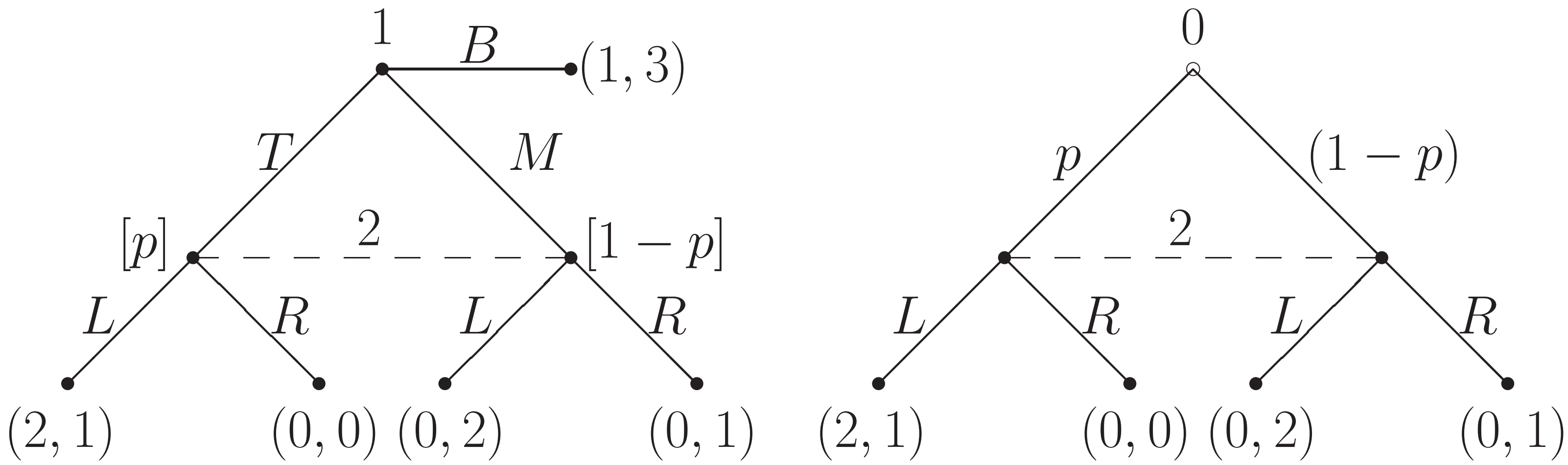
Considerare come equilibrio non solo un profilo di strategie, ma anche un profilo di credenze (*belief*)

**R1)** In ogni insieme di informazione il giocatore a cui spetta la mossa deve avere una credenza su quale nodo sia stato raggiunto nello svolgimento del gioco (cioè deve essere data una distribuzione di probabilità sui nodi dell'insieme di informazione)

All'equilibrio, la strategia di ciascun giocatore deve essere una miglior risposta alle strategie degli altri giocatori, in accordo con le sue credenze sui nodi raggiunti in ciascun insieme di informazione

Gioco di continuazione: generalizza il concetto di sottogioco
Può partire da un insieme di informazione con più di un elemento

Se nell'esempio 1 supponiamo verificata la proprietà R1), è data una distribuzione di probabilità sui nodi dell'insieme di informazione




Nel gioco a destra il caso $(0)$ rispetta le credenze di 2 sui nodi del suo insieme di informazione

La strategia di 2 deve massimizzare la sua utilità attesa

**R2)** La restrizione del profilo di strategie e di quello di credenze ad ogni gioco di continuazione deve essere un equilibrio di Nash nel gioco di continuazione

Nell'Esempio 1 $(B, R)$ non soddisfa la proprietà R2) per nessun $p \in [0, 1]$
$L$ è l'unico equilibrio di Nash nel gioco di continuazione, qualunque sia $p$

Forma strategica ("$*$" indica che 1 non ha scelte da fare)

| $1 \setminus 2$ | L | R |
|---|---|---|
| $*$ | $2p \quad \mathbf{2-p}$ | $0 \quad 1-p$ |

Richiedendo che la restrizione del profilo di strategie e di quello di credenze ad ogni gioco di continuazione sia un equilibrio di Nash, anche le credenze dei giocatori vanno considerate nella ricerca dell'equilibrio

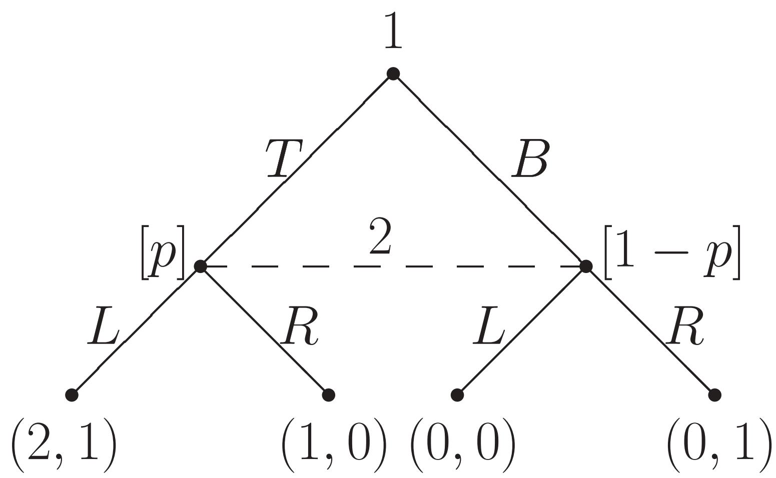
Essendo le credenze distribuzioni di probabilità sui nodi di ciascun insieme di informazione, durante la ricerca della miglior risposta per ogni $i \in N$ fissate le strategie degli altri in $N \setminus \{i\}$, si ha a che fare con calcoli di utilità attesa date le credenze di $i$ in ciascuno dei suoi insiemi di informazione all'interno del gioco di continuazione

Le credenze sono elementi "fittizi" che hanno come obiettivo fornire un metodo per il raffinamento degli equilibri di Nash

Il gioco nell'Esempio 1 non ha nessuna distribuzione di probabilità reale

E' ragionevole aspettarsi che ci siano profili di strategie e credenze che pur soddisfacendo le proprietà R1) e R2) non siano equilibri di Nash

## Esempio 2




*La forma strategica del gioco risulta essere*

| $1 \setminus 2$ | L | | R | |
|---|---|---|---|---|
| T | **2** | **1** | **1** | 0 |
| M | 0 | 0 | **0** | **1** |

*($T, R; p = 0$) soddisfa R1) e R2), ma ($T, R$) non è un equilibrio di Nash*
*Le credenze di 2 non sono fondate, in quanto $T$ è fortemente dominante per 1* ◇

Serve un'ulteriore proprietà

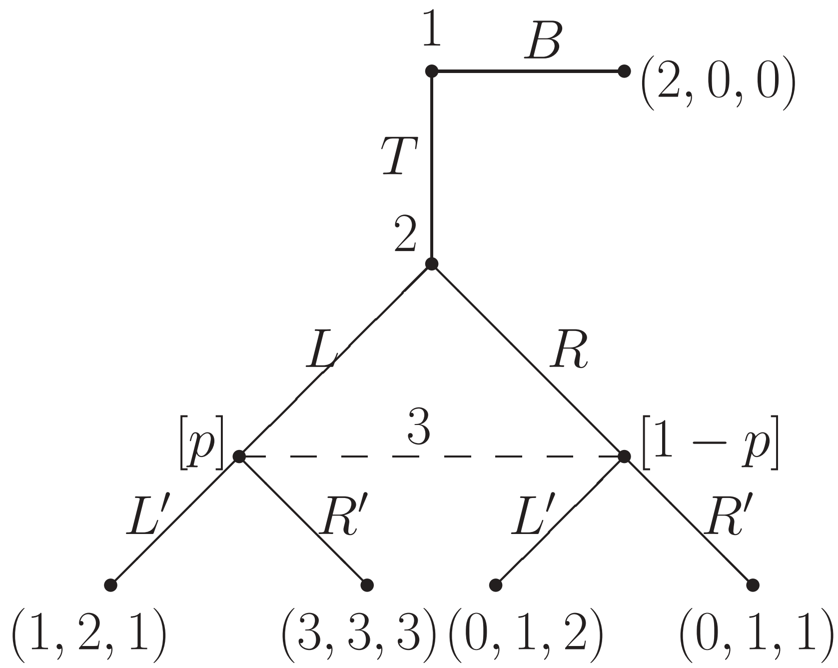
**Definizione 1** *Un insieme di informazione è sul sentiero di equilibrio se sarà raggiunto con probabilità positiva se il gioco viene giocato con le strategie di equilibrio*

**R3)** Negli insiemi di informazione che si trovano sul sentiero di equilibrio le credenze sono determinate dalla regola di Bayes in accordo con le strategie di equilibrio

Nell'Esempio 2, se all'equilibrio 1 gioca $T$, allora deve essere $p = 1$

Le proprietà R1),R2) ed R3) non garantiscono nemmeno che un profilo di strategie sia un equilibrio perfetto nei sottogiochi

## Esempio 3




*Nel sottogioco che comincia da 2 $(L, R')$ è l'unico equilibrio di Nash, e quindi $(T, L, R')$ è l'unico equilibrio perfetto nei sottogiochi*

*Il profilo $(T, L, R'; p = 1)$ soddisfa R1),R2),R3)*

*Anche il profilo $(B, L, L'; p = 0)$ soddisfa R1),R2) e R3), in quanto l'insieme di informazione di 3 non si trova sul sentiero di equilibrio poiché 1 sceglie $B$*

*In questo caso R3) non impone alcuna restrizione sulla scelta di $p$, anche se sembrerebbe "ragionevole" $p = 1$, poiché $L$ é fortemente dominante per 2* ♢

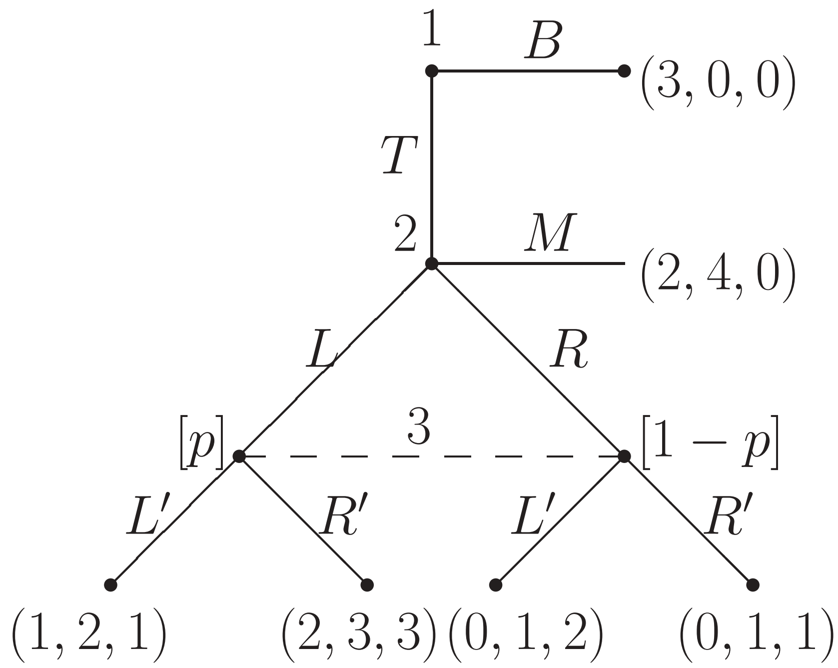
Introduciamo un'altra proprietà per un profilo di strategie all'equilibrio

**R4)** Le credenze negli insiemi di informazione fuori dal sentiero di equilibrio si devono determinare dalla strategia di equilibrio usando la regola di Bayes (dove ciò è possibile)

**Definizione 2** *Un* **equilibrio bayesiano perfetto** *è un profilo di strategie e credenze che soddisfano i requisiti R1),R2),R3) e R4)*

Nell'Esempio 3, $(B, L, L'; p = 0)$ non soddisfa R4)

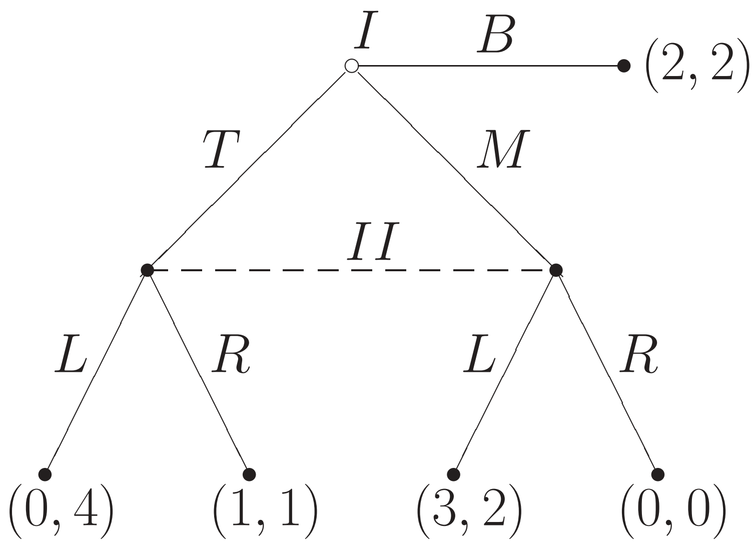
## Esempio 4

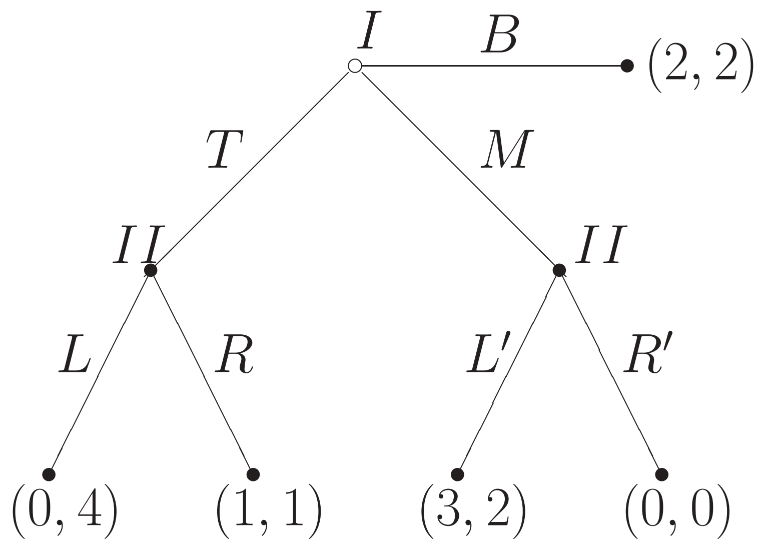



*All'equilibrio 1 sceglie $B$, 2 sceglie $M$ e l'insieme di informazione di 3 non è raggiunto, quindi non si può determinare $p$* $\diamondsuit$

Esistono ulteriori raffinamenti dell'equilibrio bayesiano perfetto per cui nell'Esempio 4 deve essere $p = 1$, poichè tra $L$ ed $R$, $L$ è dominante per 3

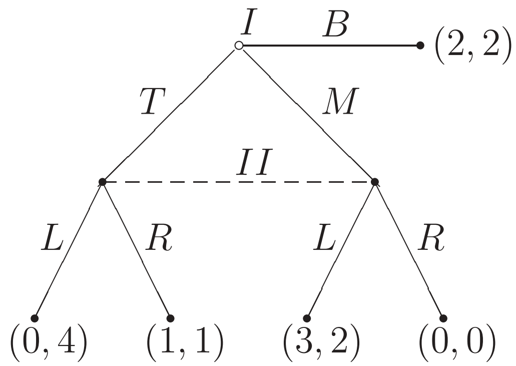
Per ciascuno dei due giochi seguenti, descriverne la forma strategica e trovarne gli equilibri di Nash, gli equilibri perfetti nei sottogiochi e gli equilibri bayesiani perfetti
Non si richiede l'analisi dell'estensione mista di questi giochi



## Soluzione

La forma strategica del primo gioco, sottolineando le "best reply", è:



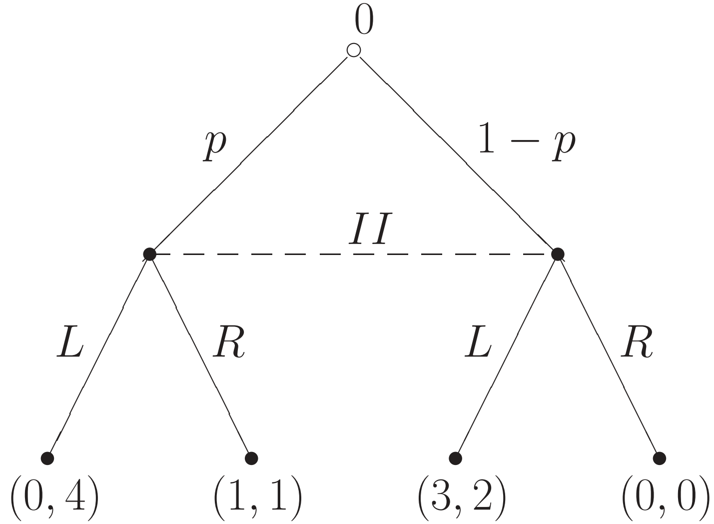

| $I \backslash II$ | L | R |
|---|---|---|
| T | $(0, \underline{4})$ | $(1, 1)$ |
| M | $(\underline{3}, \underline{2})$ | $(0, 0)$ |
| B | $(2, \underline{2})$ | $(\underline{2}, \underline{2})$ |

Ci sono due equilibri di Nash: $(M, L)$ e $(B, R)$

Non vi sono sottogiochi e quindi sono anche equilibri perfetti nei sottogiochi

Introduciamo le credenze per l'unico insieme di informazione non banale

Il "gioco di continuazione" è:



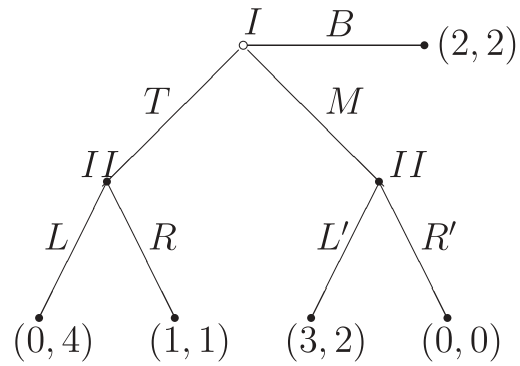

$L$ è equilibrio di Nash, $\forall p \in [0, 1]$, quindi $(M, L)$ è equilibrio bayesiano perfetto per qualsiasi set di credenze di $II$

$R$ non può essere giustificata da alcun set di credenze, quindi $(B, R)$ non può essere equilibrio bayesiano perfetto

$(M; p = 0, L)$ è l'unico l'equilibrio bayesiano perfetto

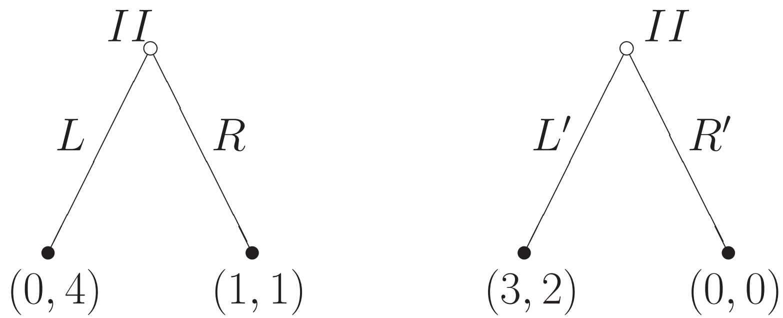
La forma strategica del secondo gioco, sottolineando le "best reply", è:

| $I \backslash II$ | LL' | LR' | RL' | RR' |
|---|---|---|---|---|
| T | $(0, \underline{4})$ | $(0, \underline{4})$ | $(1, 1)$ | $(1, 1)$ |
| M | $(\underline{3}, \underline{2})$ | $(0, 0)$ | $(\underline{3}, \underline{2})$ | $(0, 0)$ |
| B | $(2, \underline{2})$ | $(\underline{2}, \underline{2})$ | $(2, \underline{2})$ | $(\underline{2}, \underline{2})$ |




Ci sono quattro equilibri di Nash: $(M, LL')$, $(M, RL')$, $(B, LR')$ e $(B, RR')$

Ci sono due sottogiochi propri:




Gli equilibri di Nash sono, rispettivamente, $L$ e $L'$

$(M, LL')$ è l'unico equilibrio perfetto nei sottogiochi

$(M, LL')$ è l'unico equilibrio bayesiano perfetto, non essendovi insiemi di informazione non banali