1 Giochi ad informazione incompleta.

1.1 Introduzione.

La teoria "standard" dei giochi (fino al lavoro di Harsanyi [1968]) assumeva che le caratteristiche del gioco fossero conoscenza comune dei giocatori. Ad esempio, nel caso di giochi in forma normale, questo significa assumere che (nel caso di 2 giocatori) sia conoscenza comune quali siano le strategie a disposizione e quali le funzioni di utilità (o, se si vuole, le preferenze) dei due giocatori. Significa anche, ovviamente, sapere che vi sono 2 (o n) giocatori. E' ovvio che queste assunzioni in molti casi non sono realistiche. Ad esempio nell'asta al secondo prezzo è plausibile che in molte circostanze uno che partecipa ad un'asta non sia a conoscenza di quale sia il valore (in termini di utilità attribuita dagli altri all'oggetto posto in vendita all'asta). Come si fa a tenere conto di questa situazione di informazione incompleta? E' possibile realizzare un modello matematico che tenga conto di questa situazione di incompletezza dell'informazione, rimanendo nel contempo trattabile? La risposta è si e ne va attribuito il merito ad Harsanyi. Per semplificare l'esposizione, mi limiterò a considerare il caso in cui l'incertezza è limitata solo ai valori che la funzione di utilità degli "avversari" assume in corrispondenza degli esiti del gioco. Tanto per fare un esempio, può essere che il giocatore I non sappia quali siano i "payoff" di II. Più precisamente, supporrò in questo esempio (che si trova a pag. 128 di Myerson e che userò in tutti gli appunti per illustrare la teoria) che il giocatore I non sappia se sta giocando contro il giocatore $II.1$ i cui payoff sono indicati nella tabella sotto a sinistra o contro il giocatore $II.2$ (tabella di destra). Ovviamente, come di consueto, nelle tabelle sono anche indicati i payoff di I che sono identici in entrambi i casi.

$I\backslash II.1$	y_1	y_2
x_1	1 2	0 1
x_2	0 4	1 3

$I\backslash II.2$	y_1	y_2
x_1	1 3	0 4
x_2	0 1	1 2

Si noti che la semplificazione su accennata è più apparente che reale, in quanto si può vedere come altri tipi di incertezza si possono ridurre al caso di incertezza sui payoff (vedi Harsanyi o Myerson [1991]). Comunque sia, una volta accolta questa semplificazione, non è difficile riuscire a trovare una forma (detta forma bayesiana) per rappresentare una situazione come quella descritta nell'esempio qui sopra. Il vantaggio di questa rappresentazione lo si può capire facendo riferimento all'esempio: la forma bayesiana è solo un poco più complicata rispetto, per esempio, alla forma normale che si avrebbe qualora fosse conoscenza comune il fatto che il giocatore II è in realtà il giocatore $II.1$.

1.2 Gioco bayesiano.

Mi limito alla "teoria" nel caso di 2 giocatori. Per il caso generale, vedasi Myerson a pag. 67 e segg. L'idea base è quella di "tipo". Il concetto formale di tipo non è lontano dal significato della parola "tipo" nel linguaggio comune. Ovverossia, nell'esempio potremmo pensare a due tipi diversi di "giocatore II". Cioè al giocatore II corrisponde un insieme T_2 di tipi che contiene due elementi: $T_2 = \{II.1, II.2\}$. Invece per il giocatore I non ci sono problemi ($T_1 = \{I\}$ è "degenere", ovverossia ridotto ad un singleton). In generale un tipo per un giocatore (cioè un elemento di T_1 o T_2) raccoglie tutta l'informazione che è rilevante per le decisioni di tale giocatore e che non è conoscenza comune tra tutti i giocatori. Oltre a questi "nuovi" oggetti, abbiamo anche due insiemi C_1 e C_2 che contengono le azioni a disposizione dei due giocatori rispettivamente. L'idea di azione è molto vicina a quella di strategia (pura) per un gioco in forma normale. Tanto è vero che, nel nostro esempio, per indicare gli elementi di questi insiemi abbiamo usato le stesse notazioni impiegate per le strategie pure: abbiamo infatti $C_1 = \{x_1, x_2\}$ e $C_2 = \{y_1, y_2\}$. Vi è una importante differenza tra "azione" e "strategia" in un gioco bayesiano, ma la vedremo dopo. Un altro ingrediente di un gioco bayesiano sono naturalmente le funzioni di utilità. E' evidente che, nel nostro esempio, avremo una $u : C_1 \times C_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ per il primo giocatore. E per il secondo avremo $v : (C_1 \times C_2) \times T_2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Ovverossia, abbiamo $v(x_i, y_j, II.1)$ e $v(x_i, y_j, II.2)$ a seconda del tipo del giocatore II, abbiamo due diverse funzioni di utilità e quindi è ovvio "raccogliere" questa informazione in una sola funzione che, però, anzichè essere definita su $C_1 \times C_2$, è definita su $(C_1 \times C_2) \times T_2$. Da questo punto di vista, possiamo "rileggere" anche u come $u : (C_1 \times C_2) \times T_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, visto che T_1 è un singleton e quindi non cambia nulla di sostanziale. Ragioni banali di generalità e di comodità notazionale portano a considerare le funzioni di utilità $u, v : (C_1 \times C_2) \times (T_1 \times T_2) \longrightarrow \mathbb{R}$. Ricapitolando, per ora abbiamo:

$C = C_1 \times C_2$	insieme delle azioni possibili dei due giocatori
$T = T_1 \times T_2$	insieme dei tipi possibili dei due giocatori
$u, v : C \times T \longrightarrow \mathbb{R}$	funzioni di utilità

Non basta, però. Manca ancora un ingrediente fondamentale . Ovverossia, la distribuzione di probabilità soggettiva che ogni bayesiano che si rispetti assegna ad ogni cosa che non sa. Allora, nel nostro esempio, il giocatore I "deve" avere una distribuzione di probabilità p^I su T_2! Supponiamo, nel "nostro" esempio, che $p^I(II.1) = 0.6$ e $p^I(II.2) = 0.4$. Tuttavia, per capire questo aspetto il nostro esempio è troppo semplice, essendovi un unico tipo per il giocatore I. Cosa succede se vi sono due tipi, sia per I che per II? Cosa "richiediamo" in questo caso? E' semplice: richiediamo che il tipo $I.1$ abbia una distribuzione di probabilità $p^{I.1}$ su T_2 e che lo stesso valga per il tipo $I.2$ il quale quindi avrà $p^{I.2}$ su T_2. Possiamo "condensare" l'informazione fornita da $p^{I.1}$ e $p^{I.2}$ in una funzione $p^I : T_1 \longrightarrow \Delta(T_2)$. Ovverossia, p^I associa ad ogni tipo in T_1 una distribuzione di probabilità su T_2 (che è, lo ricordo, l'insieme dei tipi possibili per il giocatore II). Quindi, l'ultimo elemento che ci occorre è ancora:

$$p^I : T_1 \longrightarrow \Delta(T_2)$$
$$p^{II} : T_2 \longrightarrow \Delta(T_1)$$

Abbiamo finito. Un gioco bayesiano (a 2 giocatori) è:

$$\Gamma^b = ((C_1, C_2), (T_1, T_2), (p^I, p^{II}), (u, v))$$

Detto questo, ritorniamo sulla questione rimasta in sospeso: cos'è una strategia in un gioco bayesiano? Perchè chiamiamo "azioni" e non strategie gli elementi dei C_i? Per rispondere a questa domanda, non basta aver descritto Γ^b. Occorre anche dire come si pongono i giocatori di fronte a Γ^b o, per essere più precisi, cosa diamo per scontato che conoscano i giocatori. Ebbene: si assume che Γ^b sia conoscenza comune dei giocatori e che ogni giocatore sappia quale è il suo "vero" tipo; inoltre, si badi bene, il fatto che ogni giocatore conosca il suo tipo è conoscenza comune tra i giocatori. Precisato quanto sopra, è evidente che se noi, "studiosi di TdG", vogliamo analizzare un gioco bayesiano, dobbiamo indicare per ogni possibile tipo del giocatore I quale sia la "azione" (cioè l'elemento di C_1) che lui dovrebbe scegliere (o riteniamo che scelga): è questa che chiameremo strategia per il giocatore I. Quindi, formalmente, in un gioco bayesiano una azione per il giocatore I è un elemento di C_1, mentre una strategia (pura!) è una funzione $s_1 : T_1 \longrightarrow C_1$. Può sembrare evidente che, per il giocatore che è nel gioco e che quindi sa quale è il suo tipo, non è poi così importante l'idea di strategia nel senso indicato sopra. Tuttavia, le cose non sono così semplici: saremo obbligati a ritornare ancora sopra a questa questione.

1.3 Equilibrio bayesiano.

Non sto a riprendere la discussione fatta a suo tempo per l'equilibrio di Nash riguardo alle ragioni, motivazioni, debolezze etc. di questo concetto di soluzione. Mi metto da un punto di vista molto più ristretto. E cioè cercherò di estendere nel modo più naturale e semplice possibile l'idea di equilibrio di Nash per un gioco G ad una appropriata e corrispondente nozione di equilibrio per un gioco bayesiano Γ^b. La cosa (relativamente) più difficile da capire è cosa sia l'equivalente di una strategia mista nel contesto dei giochi bayesiani. Essa è, per il giocatore I :

$s_1 : C_1 \times T_1 \longrightarrow [0,1]$, con $\sum_{c\in C_1} s_1(c,t) = 1 \quad \forall t \in T_1$

A parole l'idea è molto semplice: per ogni possibile tipo t per il giocatore I individuiamo una distribuzione di probabilità su C_1. Infatti un modo equivalente sarebbe di definire una strategia mista come $s_1 : T_1 \longrightarrow \Delta(C_1)$. Ovviamente per il giocatore II la situazione è assolutamente analoga. Nel nostro esempio il giocatore II deve indicare una strategia mista sia quando è $II.1$, sia quando è $II.2$. Si noti che, fissata una coppia di strategie miste, siamo in grado di calcolare il payoff atteso. E quindi è un po' come avere il solito gioco; e allora ci saranno le best reply, le condizioni di equilibrio, etc. Si noti una cosa, molto importante. Per poter calcolare il payoff atteso (e quindi per poter parlare di equilibri, etc.) occorre specificare le $s_i : T_i \longrightarrow \Delta(C_i)$ per ogni giocatore i : per essere concreti, nel nostro esempio, anche se il giocatore II sa che il suo tipo è $II.1$ egli "deve" comunque specificare anche la sua azione (mista) qualora il suo tipo fosse stato $II.2$. Sennò, non si possono fare i calcoli. Ecco una ragione importantissima contro l'idea ingenua indicata alla fine del precedente paragrafo. Ma vi è anche un'altra ragione, non meno decisiva: anche se II sa che il suo tipo è $II.1$, questo fatto non è conoscenza comune! Pertanto, II rischia di prendere delle decisioni sbagliate se non tiene nel debito conto questo fatto (vedasi a questo proposito, ad esempio, le considerazioni in Myerson a pag. 63 e segg., paragrafo 2.7). Nell'esempio, la strategia y_2 è dominata per $II.1$, mentre y_1 è dominata per $II.2$. Quindi è ovvio che la strategia di equilibrio per II sarà:

y_1 per $II.1$
y_2 per $II.2$

L'analisi per il giocatore I è molto semplificata dal fatto che i suoi payoff sono o 0 o 1. Ovviamente I preferisce gli esiti (x_1, y_1) oppure (x_2, y_2). Abbiamo già detto che I assegna probabilità 0.6 a $II.1$ e 0.4 a $II.2$: ovverossia, I ritiene più probabile che il giocatore II sia del tipo 1 e quindi riterrà più probabile che II scelga l'azione y_1 anzichè y_2. Pertanto I sceglie la strategia x_1. Quindi l'equilibrio bayesiano è:

$s_1(I.1) = x_1$ (con probabilità 1)
$s_2(II.1) = y_1$ (con probabilità 1)
$s_2(II.2) = y_2$ (con probabilità 1)

Si noti che di fatto ogni volta sono scelte delle azioni "pure".

Osservazione 1.1 *Vedasi Myerson a pag. 129 per capire come II, anche se ne avesse la possibilità, non abbia alcun incentivo a far sapere ad I quale sia il suo tipo (ovverossia, se II "dice" ad I quale è il suo tipo, è plausibile che menta).*

1.4 Consistenza dei belief.

Abbiamo visto che un gioco bayesiano è:

$$\Gamma^b = ((C_1, C_2), (T_1, T_2), (p^I, p^{II}), (u, v))$$

Quindi i belief sono descritti da:

$$p^I : T_1 \longrightarrow \Delta(T_2)$$
$$p^{II} : T_2 \longrightarrow \Delta(T_1)$$

Un modo per immaginare cosa sia un gioco bayesiano è quello di supporre che la coppia di giocatori sia scelta "a caso" da una "popolazione" costituita da coppie di giocatori con caratteristiche diverse, e che sia noto però:

- il numero totale di coppie presenti
- quante coppie vi sono di ogni tipo
- le caratteristiche di queste coppie (le funzioni di utilità, ...).

Un po' più in concreto, supponiamo che $T_1 = \{I.1, I.2\}$ e $T_2 = \{II.1, II.2, II.3\}$, e che la frequenza delle diverse coppie di giocatori sia descritta dalla seguente tabella:

$I \backslash II$	$II.1$	$II.2$	$II.3$
$I.1$	0.2	0.3	0.1
$I.2$	0.1	0.1	0.2

In termini matematico-formali, significa che supponiamo di avere una distribuzione di probabilità p su $T = T_1 \times T_2$. E' evidente che dalla conoscenza di p possiamo dedurre, per esempio, la probabilità su T_2 condizionata al fatto che il tipo del giocatore I sia il tipo 1 e la probabilità su T_2 condizionata al fatto che il tipo del giocatore I sia il tipo 2 :

$$p(II.1|I.1) = \tfrac{0.2}{0.6} \qquad p(II.2|I.1) = \tfrac{0.3}{0.6} \qquad p(II.2|I.1) = \tfrac{0.1}{0.6}$$

$$p(II.1|I.2) = \tfrac{0.1}{0.4} \qquad p(II.2|I.2) = \tfrac{0.1}{0.4} \qquad p(II.3|I.2) = \tfrac{0.2}{0.4}$$

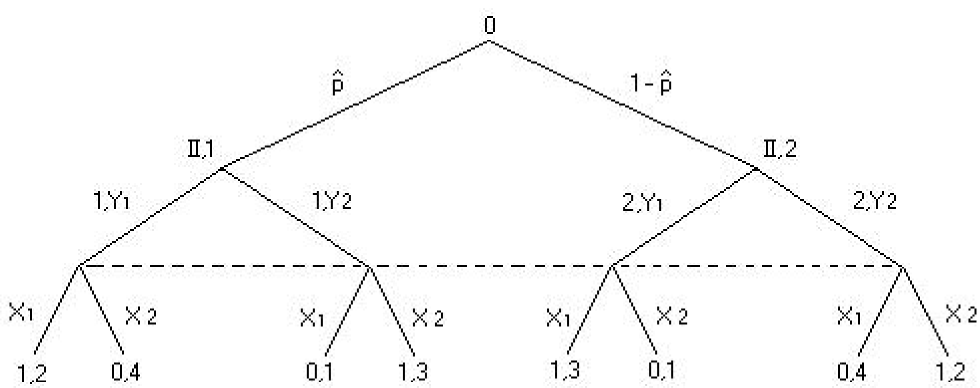
Altrettanto ovviamente possiamo invertire il ruolo dei due giocatori. In parole povere, da p su T ci siamo costruiti:

$$p^I : T_1 \longrightarrow \Delta(T_2)$$
$$p^{II} : T_2 \longrightarrow \Delta(T_1)$$

Domanda: possiamo fare il cammino inverso? Ovverossia, dato un gioco bayesiano e quindi in particolare date $p^I : T_1 \longrightarrow \Delta(T_2)$ e $p^{II} : T_2 \longrightarrow \Delta(T_1)$ possiamo ricostruire una p su T? La risposta non è sempre positiva. Se lo è, allora diremo che i belief sono consistenti. E' facile fare esempi di belief non consistenti (basta pensare a due che scommettono tra di loro e pensarci un po' su). Ebbene la teoria dei giochi bayesiani si è occupata essenzialmente del "caso consistente" per due ragioni. Una è che si tratta di un caso importante (si tratta, come l'idea di giocatori tratti "a sorte" da una data popolazione può far supporre, di belief in un certo senso "oggettivi"). L'altra è che l'idea di belief inconsistenti cozza violentemente contro l'ipotesi che la struttura del gioco sia conoscenza comune dei due giocatori. Perchè? La risposta sta in Aumann [1976] (vedasi anche Aumann [1974] e Myerson a pag. 72).

1.5 Giochi ad informazione incompleta come caso particolare di giochi ad informazione completa (ma imperfetta).

E' facile trovare un nesso tra i giochi "standard" a informazione completa e quelli ad informazione incompleta. Possiamo pensare infatti alla seguente rappresentazione in forma estesa del gioco di cui ci siamo occupati finora, supponendo che il tipo $II.1$ sia estratto con probabilità $\hat{p}$ (e quindi il tipo $II.2$ con probabilità $1 - \hat{p}$):



Cioè, potremmo pensare alla "natura" che seleziona il tipo del giocatore II con una data probabilità. Si noti che questa interpretazione concorda pienamente con quanto avevamo detto per introdurre l'idea dei belief consistenti.

Osservazione 1.2 *Nel caso in cui i belief non siano consistenti non possiamo applicare questa procedura per ottenere una forma estesa. Non vi è, tuttavia, nulla di "fondamentale" in questo fatto: sarebbe sufficiente estendere opportunamente la definizione di gioco in forma estesa, permettendo che* *i giocatori abbiano stime "personali" (soggettive) delle probabilità assegnate ai rami uscenti dalle mosse della natura.*

Ma, allora, cosa differenzia il diagramma di sopra da un normalissimo gioco in forma estesa ad informazione completa? Nulla. E l'idea di equilibrio bayesiano non è altro che l'idea di equilibrio di Nash applicata a questo gioco a informazione completa (ancorchè non perfetta: il tratteggio messo in evidenza in figura deve la sua presenza proprio alla incompletezza del gioco che stiamo descrivendo, ovverossia al fatto che non è conoscenza comune quale sia il tipo del giocatore II). Ma allora la "novità" dei giochi ad informazione incompleta si riduce a ben poca cosa! Così è, e ciò rende ancor più grande il merito di Harsanyi. Si noti inoltre che con questa rappresentazione è anche più facile capire cosa sia una strategia per un gioco bayesiano: è semplicemente una strategia nel senso usuale per questa versione del gioco come gioco in forma estesa ad informazione imperfetta ma completa.